

Analitik Hiyerarşı Prosesi (AHP)

Yrd.Doç.Dr. Sabahattin Kerem AYTULUN

Giriş

- AHP Thomas L.Saaty tarafından 1970'lerde ortaya atılmıştır.
- Amaç alternatifler arasından en iyisinin seçilmesidir.
- Subjektif kararlar ile yapılan önem sırasındaki tutarsızlıkları ortadan kaldırmada yardımcıdır.
- AHP çok kriterli karar verme yöntemi olup karar problemini hem hiyerarşik hem de şebeke yapılarında ifade edebilir.
- Bu yapıları oluştururken de karar vericinin sistem hakkındaki tecrübe ve değerlendirmelerini kullanır.

AHP Adımları

- Dört adım tanımlanır:

1

- Karar problemini ayrıştırarak kendi aralarında ilişkili karar elemanları hiyerarşisini kur.

2

- Karar elemanlarının ikili karşılaştırmaları ile girdi verilerini topla

3

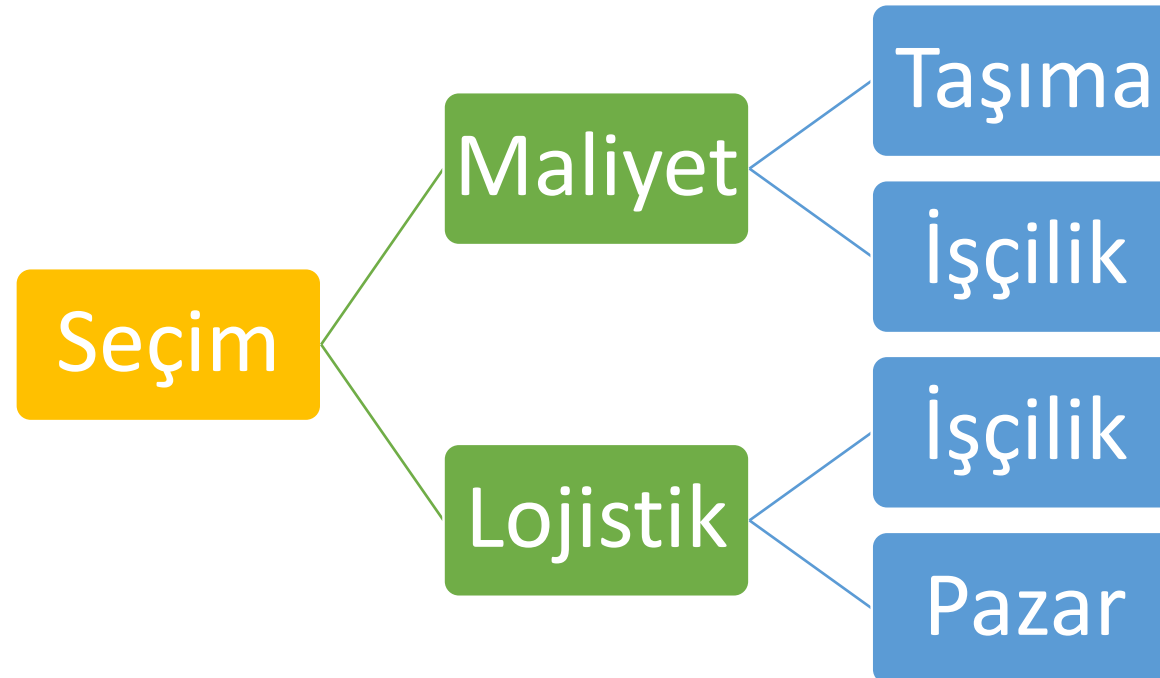
- Özdeğer (eigenvalue) yöntemi ile karar elemanlarının bağıl ağırlıklarını tahmin et.

4

- Karar elemanlarının bağıl ağırlıklarını bütünleştirerek, karar alternatiflerinin değerlendirme setlerine ulaş.

1.Adım

- Problemin önemli bileşenlerini tanımlamak ve muhtemel karmaşıklığı ortadan kaldırmak için kullanılan yöntemlerden biri de problemi hiyerarşik bir yapıda ele almaktır.
- Problem karar elemanlarına, karar elemanları da daha alt elemanlara bölünebilir.



2.Adım

- Daha yüksek bir seviyedeki amaca katkı sağlamak için bir seviyedeki elemanların ikili karşılaştırılması matrisi oluşturulur.
- Bu matris yapısı konuya hakim yönetici veya karar vericilere ikili karşılaştırma soruları sorularak elde edilir.
- Her bir ikili karşılaştırma sonunda bir etkenin diğer etken üzerindeki bağıl önemi elde edilir.
- Değerlendirme dokuz-noktalı skala üzerinden yapılır.

2.Adım

Puanl	Önem İfadesi	Açıklamalar
1	Eşit önem	İki faaliyet de amaca eşit oranda katkı sağlar.
3	Birinin zayıf önemi	Deneyim ve hükümler, birini diğerine göre önemli kılar.
5	Gerekli veya güçlü	Deneyim ve hükümler, birini diğerine göre daha güçlü bir şekilde önemli kılar.
7	İspatlanmış önem	Bir faaliyet oldukça favoridir ve bu durum daha önce ispatlanmıştır.
9	Kesin önem	Kanıtlanmış üstünlük mümkün olan en üst sıradadır.
2,4,6,8	Ara değerler	İki komşu hüküm arasındaki uzlaşma için kullanılır.

2.Adım

- İstanbul'daki bir yerleşim yerinin esneklik, lojistik ve işçilik maliyeti açısından karşılaştırıldığını düşünelim.
- Esneklik ve esneklik karşılaştırması sonucunda "1" değeri verilir.
- Esneklik ve lojistik karşılaştırıldığında analizci lojistiği esnekliğe göre "5" kat daha önemli görmüş olsun. Bu durum otomatik olarak matrisin simetriğinde "1/5" değerini oluşturur. Diğer karşılaştırmalar aşağıdaki gibi olsun.

	Esneklik (x)	Lojistik (y)	İşçilik Maliyeti (z)
Esneklik (x)	1	5	3
Lojistik (y)	1/5	1	6
İşçilik Maliyeti (z)	1/3	1/6	1

2.Adım – Tutarsızlık (Inconsistency)

	Esneklik (x)	Lojistik (y)	İşçilik Maliyeti (z)
Esneklik (x)	1	5	3
Lojistik (y)	1/5	1	6
İşçilik Maliyeti (z)	1/3	1/6	1

- Matristen;
- $y = 5x$ ve $z = 3x$ olduğu anlaşılmaktadır. Bu da;
- $\frac{1}{5}y = \frac{1}{3}z$ veya $z = \frac{3}{5}y$ olur. Ancak bu matrise uymamaktadır. Matriste $z = 6y$ görünmektedir.
- Bu durum bir tutarsızlık doğurmaktadır. Bu tutarsızlığın giderilmesinde öz değer vektörü yöntemi kullanılır.

2.Adım – Tutarsızlık (Inconsistency)

- $n * n$ in bir matrisin özdeğerleri toplamı (λ) o matrisin izine eşittir.
- Bir kare matrisin izi ise köşegen üzerindeki elemanların toplamına eşittir.
- İkili karşılaştırma matrisinde, bütün yargılar pozitif değerler alır.
- Böylece sadece pozitif özdeğerler çözüm sağlar.
- Matris tamamen tutarlı ise, o zaman sadece matris izine eşit olan özdeğer vardır. Diğer özdeğerler sıfıra eşittir.
 - $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0, \quad \lambda_n = n$

2.Adım – Tutarsızlık (Inconsistency)

- Örneğin aşağıdaki **P** matrisini göz önüne alalım. Matriste **A,B** ve **C** olmak üzere üç etken yargılamıştır.
- $3 * 3$ matristir ve $iz = n = 3$ tür.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1/5 & 1 & 3/5 \\ 1/3 & 5/3 & 1 \end{bmatrix}$$

- Özdeğerleri elde etmek için, $|P - \lambda I| = 0$ determinantında λ için çözüm bulunur. (**I** birim matristir.)

2.Adım – Tutarsızlık (Inconsistency)

$$|P - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 5 & 3 \\ 1/5 & 1 - \lambda & 3/5 \\ 1/3 & 5/3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

In[10]:= **P**: (((1.), 5, 3), (1/5, 1.), 3/5), (1/3, 5/3, 1.))

Out[10]= ((1.), 5, 3), (1/5, 1.), 3/5), (1/3, 5/3, 1.))

In[12]:= **Det**(((1.), 5, 3), (1/5, 1.), 3/5), (1/3, 5/3, 1.))

Out[12]= 3.².

In[13]:= **Solve**(3.². : 0,)

Out[13]= ((+ 0), (+ 0), (+ 3)) olduğundan matris tutarlıdır.

In[15]:= **Eigenvalues**(**P**)

Out[15]= (3., ., .)

2.Adım – Tutarsızlık (Inconsistency)

- Tutarsızlığı göstermek için aşağıdaki **P** matrisini göz önüne alalım.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 6,2 & 3 \\ 1/5 & 1 & 1/4 \\ 1/3 & 502/100 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|P - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 6,2 & 3 \\ 1/5 & 1 - \lambda & 1/4 \\ 1/3 & 502/100 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 3.25 \quad \text{Diğer kökler karmaşık sayı.}$$

Elde edilen değer ile tutarlılığı ölçmek için; $CI = (\lambda_{max} - n)/(n - 1)$ ve $CR = \left(\frac{CI}{ACI}\right) * 100$ hesaplamaları yapılır.

CI: Consistency Index

CR: Consistency Ratio

ACI: Average Consistency Index

Satty ye göre ACI değerleri matrisin boyutuna göre aşağıdaki değerleri almalıdır:

<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ACI	0,00	0,00	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,48	1,56	1,57	1,59

2.Adım – Tutarsızlık (Inconsistency)

- CR nin %10 ve daha küçük değerleri kabul edilebilir.
- Örneğimiz için;

$$CI = \frac{3,25-3}{2} = 0,125 \quad \text{ve} \quad CR = \frac{0,125}{0,58} * 100 = \%21,5$$

- %21,5 değeri %10'dan büyük olduğundan matris tutarsızdır ve yeniden değerlendirme almak gerekir.

3.Adım

- Bu adımda, daha önce alınan girdilerin çıktısı olarak bağıl ağırlıkları hesaplanır.
- Elimizde P_1, P_2, \dots, P_n kriter ve ilgili $W = (W_1, W_2, \dots, W_n)$ ağırlıklar olduğunu düşünelim.
- Matris teorisine göre eğer matris tutarlı ise bu durumda $PW = nW$ olur ki buradaki P matrisi ikili karşılaştırmaların olduğu yargı matrisidir.
- Matris bir şekilde tutarsız ise bu durumda $PW = \lambda_{max}W$ olur ki burada λ_{max} en büyük pozitif özdeğerdir.
- Ağırlıklar $|P - \lambda_{max}I||W| = 0$ eşitliğini sağlayacak şekilde çözümlenir.

4.Adım

- Son adımda bağıl ağırlıklar veya her bir alternatifin önceliği hesaplanır.
- Bu hesaplama karara etkisi olan bütün etkenlerin beklenen değer veya ağırlıklı aritmetik ortalamaları alınarak bulunur.

Örnek

- Bir imalatçı yeni bir Y ürününün imalatı için yeni bir fabrika açmaya karar vermiştir.
- Yer seçimi için A,B ve C isimli üç farklı aday yeri belirlenmiştir.
- En iyi yerin seçimi için beş kişilik bir komite teşkil edilmiştir.
- Bu kişiler; finans, üretim/mühendislik, pazarlama/satış, yönetim ve araştırma olmak üzere farklı departmanlardan gelmiştir.
- Standart AHP prosedürünü takip etmek için problemin tanımına ve değişkenlerin belirlenmesine ihtiyaç duyulmaktadır.

Örnek

- Problemin amacı;
"Fabrika için en uygun konumu seç"
- Daha önce tanımlandığı gibi AHP sürecinin dört aşaması vardır. İlk aşama modelin oluşturulmasını içerir ki; ana kategorilerin, kriterlerin ve alternatiflerin tanımlanmasından oluşur. Hepsi birlikte karar elemanları olarak adlandırılır.
- Bu tanımlamalar yapıldıktan sonra, problemin farklı seviyelerde hiyerarşik bir yapıya dönüştürülmesi gerekir.
- İlk seviyede nihai amaç bulunur; "Fabrika için en uygun konumun seçilmesi"

Örnek

Seviye -1

En iyi konumun seçilmesi

Seviye -2

Maliyet

Esneklik

Lojistik

Öznel

Seviye -3

Taşıma

İşçilik

Hizmet

Büyüme ufku

Gelecek senaryolar

İşçiliğin bulunabilirliği

Pazara yakınlık

Ham madde bulunabilirliği

Yönetim direktifleri

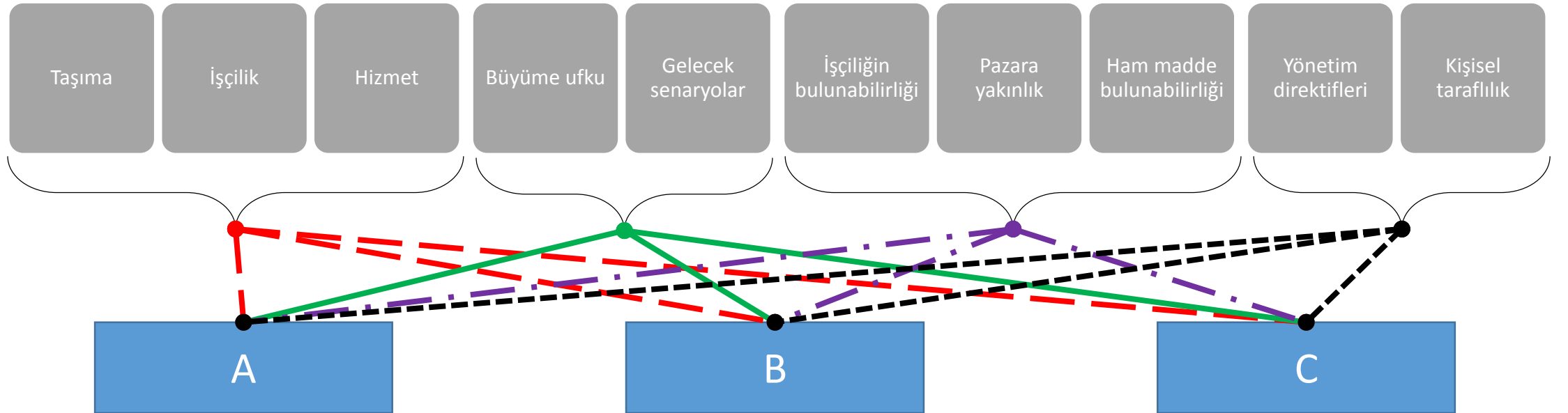
Kişisel taraflılık

Seviye -4

A

B

C



Örnek

- İkinci adımda, kategori ve kriterler için bağıl önemi (ağırlığı) tespit etmek amacıyla ikili karşılaştırmalar yapılır.
- Bu ağırlıklar her bir alternatifin nihai ağırlığını bulmak için kullanılacaktır.
- Karar elemanları aynı seviyedeki diğer elemanlar ile hemen bir üstteki seviyeye uygun olarak tek seferde bir ikili karşılaştırılacak şekilde tasarlanır.
- Aşağıdaki tablo seviye-2'deki elemanların (kategori) seviye-1'e göre ikili karşılaştırma sonuçlarını vermektedir.
 - Bu karşılaştırma heyetteki uzmanlar tarafından yapılmaktadır.

	Maliyet	Esneklik	Lojistik	Öznel
Maliyet	1	5	3	4
Esneklik	1/5	1	1/6	1/3
Lojistik	1/3	6	1	4
Öznel	1/4	3	1/4	1

Matrisi doldurmak için $n(n - 1)/2$ değerlendirme yapmak yeterlidir. Diyagonalin altında kalanlar karşılıklı olarak yazılır.

Örnek

- Sonraki adımda özdeğerler ve özvektörler hesaplanır.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1/5 & 1 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 6 & 1 & 4 \\ 1/4 & 3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1/5 & 1 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 6 & 1 & 4 \\ 1/4 & 3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 5 & 3 & 4 \\ 1/5 & 1-\lambda & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 6 & 1-\lambda & 4 \\ 1/4 & 3 & 1/4 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \text{ için}$$

In[3]:= `Det` $\left| \left| \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1/5 & 1 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 6 & 1 & 4 \\ 1/4 & 3 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \right| \right|$ Tutarlı mı?

Out[3]= $\frac{91}{90} \cdot \frac{163}{36} \cdot 4^3 + 1^4$

$$\lambda = 4,262$$

$$CI = \frac{4,262-4}{3} = 0,0873$$

In[7]:= `Solve` $\left| \left| \begin{pmatrix} 91 & 163 \\ 90 & 36 \end{pmatrix} \cdot 4^3 + 1^4 : 0 \right| \right|$

$$CR = \frac{0,0873}{0,90} * 100 = \%9,7$$

Out[7]= $\left\{ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0.21417 \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0.0240589 \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1.05217 \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 4.26229 \right\} \right\}$

%9,7 < %10 Tutarlı kabul edilebilir.

Örnek

- Şimdi ise bağıl ağırlıklar hesaplanmalıdır.

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1-4,262 & 5 & 3 & 4 \\ 1/5 & 1-4,262 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 6 & 1-4,262 & 4 \\ 1/4 & 3 & 1/4 & 1-4,262 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,262 & 5 & 3 & 4 \\ 1/5 & -3,262 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 6 & -3,262 & 4 \\ 1/4 & 3 & 1/4 & -3,262 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}][\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 1-4,262 & 5 & 3 & 4 \\ 1/5 & 1-4,262 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 6 & 1-4,262 & 4 \\ 1/4 & 3 & 1/4 & 1-4,262 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,262 & 5 & 3 & 4 \\ 1/5 & -3,262 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 6 & -3,262 & 4 \\ 1/4 & 3 & 1/4 & -3,262 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{W}_3 \\ \mathbf{W}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Örnek

Out[32]= [[W2 + 0. + 0.114837 W1, W3 + 0. + 0.592508 W1, W4 + 0. + 0.227644 W1]]

$$W_1 = 5 \text{ için} \quad \begin{array}{l} W_2 = 0,574185 \\ W_3 = 2,96254 \\ W_4 = 1,13822 \end{array} \quad \sum W = 9,674945$$

Toplamları 1 olması için normalize edilir ise;

Ağırlık	Gerçek	Normalize
W1	5,00000	0,51680
W2	0,57419	0,059348
W3	2,96254	0,306207
W4	1,13822	0,117646
Toplam	9,67495	1,00000

Örnek

	Maliyet	Esneklik	Lojistik	Öznel	Ağırlık
Maliyet	1	5	3	4	0,517
Esneklik	1/5	1	1/6	1/3	0,059
Lojistik	1/3	6	1	4	0,306
Öznel	1/4	3	1/4	1	0,118

- Her bir kategorinin kriterleri için de benzer hesaplamalar yapılır.
 - Özdeğer, tutarlılık testi ve tutarlı ise ağırlık hesaplaması ayrı ayrı yapılır.
- Buna göre elde edilen ikili karşılaştırma matrisleri ile hesaplanan bağıl ağırlıklar sonraki yansılarda verilmiştir.

Örnek

Maliyetler	Taşıma	İşçilik	Hizmet	Ağırlık
Taşıma	1	3	5	0,637
İşçilik		1	3	0,258
Hizmet			1	0,105

Lojistik	İşçilik Bulun.	Pazara Yakınlık	Hamm.. Bulun.	Ağırlık
İşçilik Bulun.	1	5	1	0,455
Pazara Yakınlık		1	1/5	0,091
Hammadde Bulun.			1	0,455

Öznel	Yönetim Direk.	Kişisel taraf.	Ağırlık
Yönetim Direk.	1	5	0,833
Kişisel taraf.		1	0,167

Esneklik	Büyüme Ufku	Gelecek Sen.	Ağırlık
Büyüme Ufku	1	1	0,5
Gelecek Sen.		1	0,5

- Seviye-4 teki her bir yer alternatifi Seviye-3'te bulunan 10 farklı kritere göre ikili olarak karşılaştırılır.
- Bu karşılaştırma tabloları sonraki yansılarda verilmiştir.
 - Özdeğer, tutarlılık testi ve tutarlı ise ağırlık hesaplaması ayrı ayrı yapılır.

Örnek

Taşıma Maliyeti	A	B	C	Ağırlık
A	1	3	1/3	0,258
B		1	1/5	0,105
C			1	0,637
İşçilik Maliyeti	A	B	C	Ağırlık
A	1	5	1/3	0,272
B		1	1/8	0,067
C			1	0,661
Hizmet Maliyeti	A	B	C	Ağırlık
A	1	3	1	0,429
B		1	1/3	0,143
C			1	0,429

Örnek

İşçilik Bulun.	A	B	C	Ağırlık
A	1	3	1/5	0,183
B		1	1/8	0,075
C			1	0,742
Pazara Yakınlık	A	B	C	Ağırlık
A	1	1/5	3	0,183
B		1	8	0,744
C			1	0,075
Hamm. Bulun.	A	B	C	Ağırlık
A	1	5	3	0,637
B		1	1/3	0,105
C			1	0,258

Örnek

Yönetim Direktif.	A	B	C	Ağırlık
A	1	3	1/3	0,258
B		1	1/5	0,105
C			1	0,637
Kişisel Tarafllık	A	B	C	Ağırlık
A	1	3	1	0,429
B		1	1/3	0,143
C			1	0,429

Örnek

Büyüme Ufku	A	B	C	Ağırlık
A	1	1	1/3	0,200
B		1	1/3	0,200
C			1	0,600
Gelecek Senaryo.	A	B	C	Ağırlık
A	1	1	1/3	0,200
B		1	1/3	0,200
C			1	0,600

Seviye 1	En iyi konumun seçimi				Uzman -1			
Seviye 2	Kategori	Ağırlık	Kategori	Ağırlık	Kategori	Ağırlık	Kategori	Ağırlık
	Maliyet	0,517	Esneklik	0,059	Lojistik	0,306	Öznel	0,118
Seviye 3	Kriter	Ağırlık	Kriter	Ağırlık	Kriter	Ağırlık	Kriter	Ağırlık
	Taşıma	0,637	Büyüme	0,500	İşçilik Bul.	0,455	Yönetim	0,833
	İşçilik	0,258	Gelecek	0,500	Pazar	0,091	Kişisel	0,167
	Hizmet	0,105			Hammadde	0,455		
Seviye 4	Konum-A	Ağırlık	Konum-B	Ağırlık	Konum-C	Ağırlık		
	Taşıma	0,258	Taşıma	0,105	Taşıma	0,637		
	İşçilik	0,272	İşçilik	0,067	İşçilik	0,661		
	Hizmet	0,429	Hizmet	0,143	Hizmet	0,429		
	Büyüme	0,200	Büyüme	0,200	Büyüme	0,600		
	Gelecek	0,200	Gelecek	0,200	Gelecek	0,600		
	İşçilik Bul.	0,183	İşçilik Bul.	0,075	İşçilik Bul.	0,742		
	Pazar	0,183	Pazar	0,183	Pazar	0,075		
	Hammadde	0,637	Hammadde	0,143	Hammadde	0,258		
	Yönetim	0,429	Yönetim	0,105	Yönetim	0,429		
	Kişisel	0,258	Kişisel	0,258	Kişisel	0,637		
	Global Ağırlık	0,322852831	0,113932138	0,552678282				

Konum-A için Global Ağırlık= $0,517(0,637 * 0,258 + 0,258 * 0,272 + 0,105 * 0,429) + 0,059 * (0,5 * 0,2 + 0,5 * 0,2) + 0,306 * (0,455 * 0,183 + 0,091 * 0,183 + 0,455 * 0,637) + 0,118 * (0,833 * 0,429 + 0,167 * 0,258) = 0,3228528311$

Bu hesaplama sadece 5 uzmandan biri olan Uzman-1 için yapılmıştır. Diğer Uzmanların yaptığı değerlendirmeler ayrıca hesaplanmalıdır.

Örnek

Alternatif	Uzman-1	Uzman-2	Uzman-3	Uzman-4	Uzman-5
A	0,322	0,298	0,282	0,246	0,280
B	0,114	0,207	0,124	0,233	0,209
C	0,553	0,495	0,594	0,521	0,511

Alternatif	Aritmetik Ortalama	Sıra
A	0,286	2
B	0,178	3
C	0,535	1